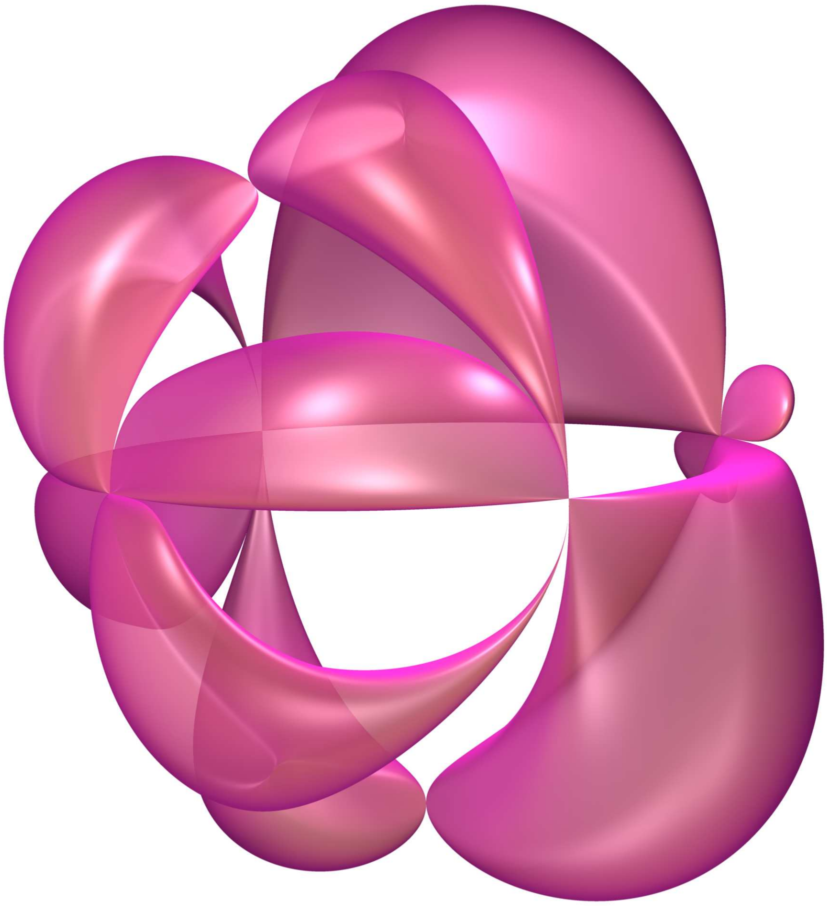
Titelbild DMV–Mitteilungen 04/08



Eine Fläche mit vielen reellen Singularitäten

Oliver Labs, im November 2008

Bereits E.E. Kummer beschäftigte sich 1864 mit der Frage nach der maximalen Anzahl von Singularitäten auf Flächen von gegebenem Grad im Dreiraum. Nachdem L. Schläfli kurz zuvor alle möglichen Kombinationen von Singularitäten auf kubischen Flächen angegeben hatte und eine entsprechende Untersuchung für Flächen vom Grad 4 damals noch in weiter Ferne war, stellte Kummer fest, dass auf Quartiken höchstens 16 Singularitäten existieren können.

Die 16 Singularitäten in Kummers Beispielen waren alle reell, und zwar doppelkegel–förmig, lokal von der Form $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Durch eine interessante Beziehung zwischen ebenen Kurven vom Grad 6 und Flächen vom Grad 4 konnte C. Rohn 1913 auch die maximal mögliche Anzahl des anderen reellen Typs gewöhnlicher Doppelpunkte (lokal von der Form $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, genannt Einsiedlerpunkte) auf Quartiken bestimmen, nämlich 10. Dies hängt eng mit D. Hilberts 16. Problem über die gegenseitige Lage von Ovalen ebener glatter Kurven zusammen.

2008 zeigten dann E. Brugallé und der Autor, dass für jeden Grad $d \geq 3$ die maximal mögliche Anzahl von Einsiedlerpunkten strikt kleiner ist als die maximal mögliche Anzahl von Singularitäten. Offen ist allerdings immer noch, ob die maximale Anzahl von Singularitäten auf einer komplexen Fläche im Dreiraum strikt größer ist als die Anzahl der möglichen reellen Singularitäten. Für Flächen vom Grad ≤ 6 ist aber bekannt, dass die maximal mögliche Anzahl von Singularitäten auf einer komplexen Fläche auch von einer reellen Fläche erreicht werden kann.

In letzter Zeit werden reelle algebraische Flächen häufiger in Anwendungen verwendet, so dass deren Echt–Zeit–Visualisierung immer wichtiger wird. Flächen mit vielen höheren Singularitäten, wie die auf dem Titelbild gezeigte, sind hierfür eine besondere Herausforderung: Rechnet man mit einer Genauigkeit von nur einigen Stellen, so stößt man in der Nähe der Spitzen auf gravierende nummerische Probleme; auf der anderen Seite ist das exakte Berechnen aller Singularitäten bisher leider recht zeitraubend. Die Gleichung der abgebildeten Fläche ist $((y - x^2)^2 - y^4) \cdot x \cdot y \cdot z - (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^4 = 0$.

Da Flächen mit vielen reellen Singularitäten auch ästhetisch ansprechend sind, zeigt die Wanderausstellung Imaginary 2008 (www.Imaginary2008.de) einige besonders markante Beispiele, die der Ausstellungsbesucher nicht nur betrachten, sondern auch interaktiv erforschen kann.