Über die Schönheit der Geometrie

Dr. Oliver Labs

Universität des Saarlandes, Saarbrücken,
E-Mail: Labs@Math.Uni-Sb.de, mail@OliverLabs.net,
Web: www.OliverLabs.net

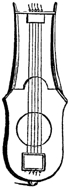
Saarbrücken, 31. August, 2008

Einführung

Was haben folgende vier Dinge gemeinsam?

Einführung

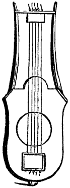
Was haben folgende vier Dinge gemeinsam?



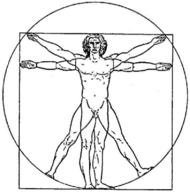
altgr. Instrument

Einführung

Was haben folgende vier Dinge gemeinsam?



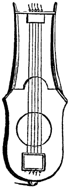
altgr. Instrument



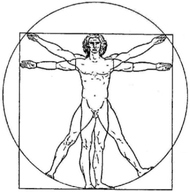
Mensch

Einführung

Was haben folgende vier Dinge gemeinsam?



altgr. Instrument

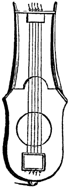


Mensch

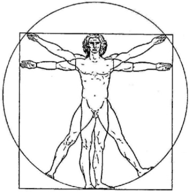
Icosaeder

Einführung

Was haben folgende vier Dinge gemeinsam?

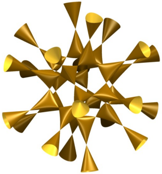


altgr. Instrument



Mensch

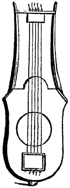
Icosaeder



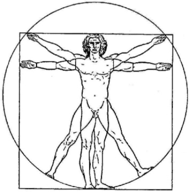
Barth Fläche

Einführung

Was haben folgende vier Dinge gemeinsam?

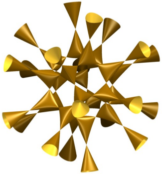


altgr. Instrument



Mensch

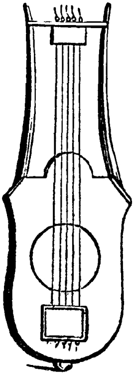
Icosaeder



Barth Fläche

Einen engen Zusammenhang mit dem
Goldenen Schnitt.

Töne bei Saiteninstrumenten



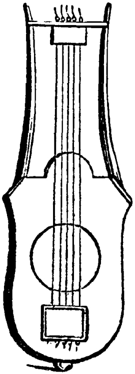
Verhältnisse
Ganzes : Teil.

2 : 1 (Oktave)

3 : 2 (Quint)

4 : 3 (Quart)

Töne bei Saiteninstrumenten



Verhältnisse
Ganzes : Teil.

2 : 1 (Oktave)

3 : 2 (Quint)

4 : 3 (Quart)

Verschiedene Verhältnisse ganzer Zahlen ergeben unterschiedliche Intervalle.

- Aber nicht jede Zahl ist als Verhältnis ganzer Zahlen auszudrücken!
- Dies wussten schon die Griechen vor mehr als 2000 Jahren!
- Ein Beispiel für eine solche Zahl, die nicht als Verhältnis ganzer Zahlen geschrieben werden kann:
  Der sogenannte Goldene Schnitt.

- Aber nicht jede Zahl ist als Verhältnis ganzer Zahlen auszudrücken!
- Dies wussten schon die Griechen vor mehr als 2000 Jahren!
- Ein Beispiel für eine solche Zahl, die nicht als Verhältnis ganzer Zahlen geschrieben werden kann:
  Der sogenannte Goldene Schnitt.

- Aber nicht jede Zahl ist als Verhältnis ganzer Zahlen auszudrücken!
- Dies wussten schon die Griechen vor mehr als 2000 Jahren!
- Ein Beispiel für eine solche Zahl, die nicht als Verhältnis ganzer Zahlen geschrieben werden kann:
  Der sogenannte Goldene Schnitt.

Der Goldene Schnitt

Eine Teilung im **Goldenen Schnitt** liegt vor, wenn sich die größere Teilstrecke zur ganzen Strecke verhält, wie die kleinere Teilstrecke zur größeren. Hat die ganze Strecke die Länge 1:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1-\varphi}\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\varphi}$$

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1-\varphi}{\varphi} \iff 0 = \varphi^2 + \varphi - 1$$

Es folgt (mit der pq-Formel): $\varphi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 0.618\ldots$.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\dots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Beweis (durch Widerspruch) weiter **:**

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Beweis (durch Widerspruch) weiter**:**
Angenommen doch, also $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$. Dann könnte man den Bruch auch kürzen.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Beweis (durch Widerspruch) weiter**:**
Angenommen doch, also $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$. Dann könnte man den Bruch auch kürzen.
Quadrieren beider Seiten liefert: $p^2 = 2 \cdot q^2$.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Beweis (durch Widerspruch) weiter**:**
Angenommen doch, also $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$. Dann könnte man den Bruch auch kürzen.
Quadrieren beider Seiten liefert: $p^2 = 2 \cdot q^2$.
p muss also gerade sein, d.h. $p = 2 \cdot a$ für ein gewisses a.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Beweis (durch Widerspruch) weiter**:**
Angenommen doch, also $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$. Dann könnte man den Bruch auch kürzen.
Quadrieren beider Seiten liefert: $p^2 = 2{\cdot}q^2$.
p muss also gerade sein, d.h. $p = 2{\cdot}a$ für ein gewisses a.
Daher: $(2{\cdot}a)^2 = 4{\cdot}a^2 = 2{\cdot}q^2$, d.h. $2{\cdot}a^2 = q^2$.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Beweis (durch Widerspruch) ▸ weiter **:**
Angenommen doch, also $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$. Dann könnte man den Bruch auch kürzen.
Quadrieren beider Seiten liefert: $p^2 = 2{\cdot}q^2$.
p muss also gerade sein, d.h. $p = 2{\cdot}a$ für ein gewisses a.
Daher: $(2{\cdot}a)^2 = 4{\cdot}a^2 = 2{\cdot}q^2$, d.h. $2{\cdot}a^2 = q^2$.
q muss somit auch gerade sein.

Der Goldene Schnitt ist kein Bruch

Man kann $\sqrt{5}$ (und daher auch den Goldenen Schnitt) beliebig genau berechnen: $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$. aber nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausdrücken (im Gegensatz zu den aus der Musik bekannten Intervallen, siehe oben):
D.h., es gibt keine ganzen Zahlen p, q, so dass $p : q = \sqrt{5}$.

Beweis (durch Widerspruch) weiter**:**
Angenommen doch, also $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$. Dann könnte man den Bruch auch kürzen.
Quadrieren beider Seiten liefert: $p^2 = 2 \cdot q^2$.
p muss also gerade sein, d.h. $p = 2 \cdot a$ für ein gewisses a.
Daher: $(2 \cdot a)^2 = 4 \cdot a^2 = 2 \cdot q^2$, d.h. $2 \cdot a^2 = q^2$.
q muss somit auch gerade sein.
Dann war aber der Bruch $\frac{p}{q}$ nicht gekürzt. Die ursprüngliche Annahme war also falsch.

Der Goldene Schnitt und regelmäßige Fünfecke

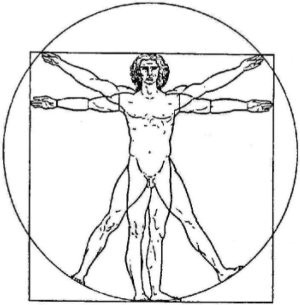
Für den Goldenen Schnitt gilt: $\varphi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618\dots$.
Interessant: $\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi = 1.618\dots$.

- Sokrates: *Der Mensch ist das Maß aller Dinge!*
- Nach Leonardo da Vinci ist dieses Maß der Goldene Schnitt $\varphi = 0.618\dots$.
- Dieses Maß ist wesentlich beim regelmäßigen Fünfeck.

Der Goldene Schnitt und regelmäßige Fünfecke

Für den Goldenen Schnitt gilt: $\varphi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618\ldots$.
Interessant: $\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi = 1.618\ldots$.

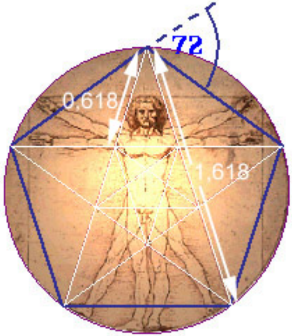
- Sokrates: *Der Mensch ist das Maß aller Dinge!*
- Nach Leonardo da Vinci ist dieses Maß der Goldene Schnitt $\varphi = 0.618\ldots$.
- Dieses Maß ist wesentlich beim regelmäßigen Fünfeck.



Der Goldene Schnitt und regelmäßige Fünfecke

Für den Goldenen Schnitt gilt: $\varphi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618\ldots$.
Interessant: $\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi = 1.618\ldots$.

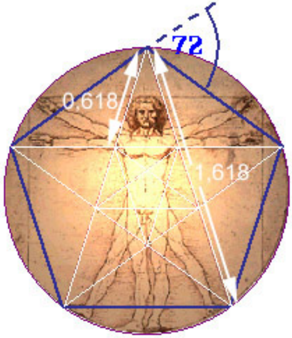
- Sokrates: *Der Mensch ist das Maß aller Dinge!*
- Nach Leonardo da Vinci ist dieses Maß der Goldene Schnitt $\varphi = 0.618\ldots$.
- Dieses Maß ist wesentlich beim regelmäßigen Fünfeck.



Der Goldene Schnitt und regelmäßige Fünfecke

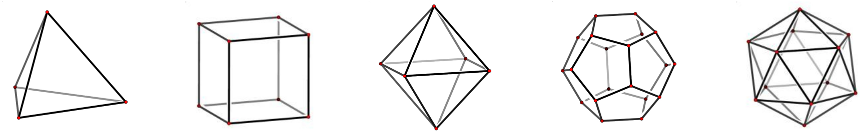
Für den Goldenen Schnitt gilt: $\varphi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 0.618\ldots$.
Interessant: $\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi = 1.618\ldots$.

- Sokrates: *Der Mensch ist das Maß aller Dinge!*
- Nach Leonardo da Vinci ist dieses Maß der Goldene Schnitt $\varphi = 0.618\ldots$.
- Dieses Maß ist wesentlich beim regelmäßigen Fünfeck.



Die Platonischen Körper

- Es gibt genau fünf sogenannte **platonische Körper**:

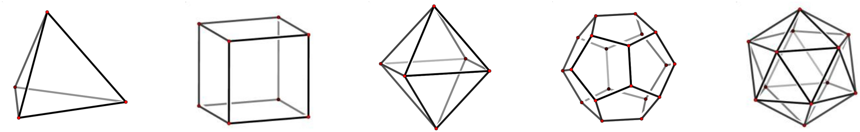


Tetraeder Würfel Octaeder Dodecaeder Icosaeder

- Das Fünfeck (und damit der Goldene Schnitt) spielt offenbar beim Dodecaeder und (weniger offensichtlich) beim Icosaeder eine Rolle.
- Diese beiden haben die gleichen Symmetrien!

Die Platonischen Körper

- Es gibt genau fünf sogenannte **platonische Körper**:

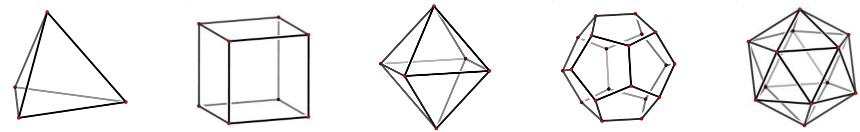


Tetraeder Würfel Octaeder Dodecaeder Icosaeder

- Das Fünfeck (und damit der Goldene Schnitt) spielt offenbar beim Dodecaeder und (weniger offensichtlich) beim Icosaeder eine Rolle.
- Diese beiden haben die gleichen Symmetrien!

Die Platonischen Körper

- Es gibt genau fünf sogenannte **platonische Körper**:

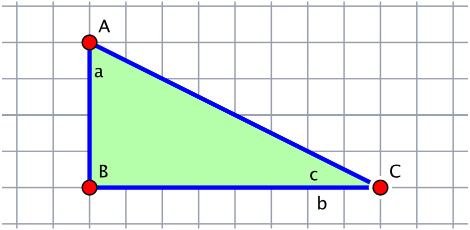


Tetraeder Würfel Octaeder Dodecaeder Icosaeder

- Das Fünfeck (und damit der Goldene Schnitt) spielt offenbar beim Dodecaeder und (weniger offensichtlich) beim Icosaeder eine Rolle.
- Diese beiden haben die gleichen Symmetrien!

Wurzeln in rechtwinkligen Dreiecken

In rechtwinkligen Dreiecken stößt man sofort auf Wurzeln.
Z.B.: Haben die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks die Längen 1 und 2, so ist die dritte Seite $\sqrt{5}$ lang.

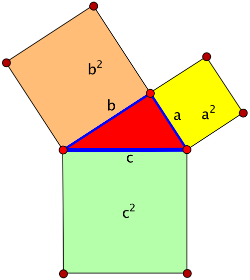


Dies folgt aus dem Satz des Pythagoras:
$1^2 + 2^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = 2.23\ldots.$

Der Satz des Pythagoras

Satz (des Pythagoras)

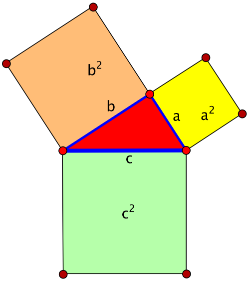
Ist ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c mit einem rechtem Winkel gegenüber der Seite c gegeben, so gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.



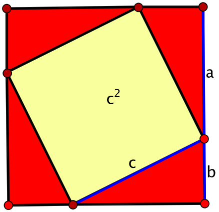
Der Satz des Pythagoras

Satz (des Pythagoras)

Ist ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c mit einem rechtem Winkel gegenüber der Seite c gegeben, so gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.



Beweis:



$$(a+b)^2 - c^2 = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot ab$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 2ab$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

(zum Satz des Pythagoras)

Das Schöne daran:

- Man kann die Aussage beweisen!

(zum Satz des Pythagoras)

Das Schöne daran:

- Man kann die Aussage beweisen!
- Der Beweis ist kurz und leicht verständlich.

(zum Satz des Pythagoras)
Das Schöne daran:

- Man kann die Aussage beweisen!
- Der Beweis ist kurz und leicht verständlich.
- Die Griechen kannten diesen Beweis schon vor mehr als 2000 Jahren.

(zum Satz des Pythagoras)

Das Schöne daran:

- Man kann die Aussage beweisen!
- Der Beweis ist kurz und leicht verständlich.
- Die Griechen kannten diesen Beweis schon vor mehr als 2000 Jahren.
- Die Aussage ist immer noch richtig.

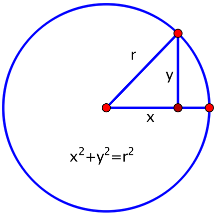
(zum Satz des Pythagoras)

Das Schöne daran:

- Man kann die Aussage beweisen!
- Der Beweis ist kurz und leicht verständlich.
- Die Griechen kannten diesen Beweis schon vor mehr als 2000 Jahren.
- Die Aussage ist immer noch richtig.
- Und wird auch immer richtig bleiben!

Kreis und Kugel

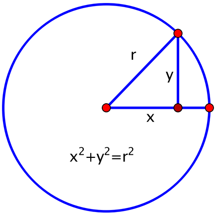
Der Satz des Pythagoras liefert auch einen Bezug zwischen Geometrie und Algebra:

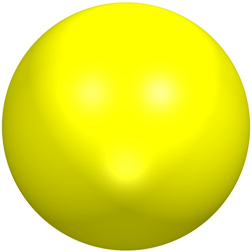


Die Punkte (x, y) auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius r erfüllen: $x^2 + y^2 = r^2$.

Kreis und Kugel

Der Satz des Pythagoras liefert auch einen Bezug zwischen Geometrie und Algebra:

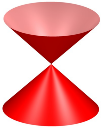




Die Punkte (x, y) auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius r erfüllen: $x^2 + y^2 = r^2$.
Ähnlich erfüllen die Punkte einer Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Flächen mit Spitzen

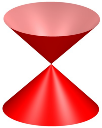
Höhere Potenzen $\Rightarrow$ wesentlich kompliziertere Gebilde.
Insbesondere können dabei auch Spitzen auftreten.
Einige Beispiele:



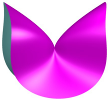
$x^2 + y^2 = z^2$

Flächen mit Spitzen

Höhere Potenzen $\Rightarrow$ wesentlich kompliziertere Gebilde.
Insbesondere können dabei auch Spitzen auftreten.
Einige Beispiele:



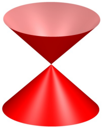
$x^2 + y^2 = z^2$



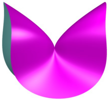
$x^3 + y^2 = z^2$

Flächen mit Spitzen

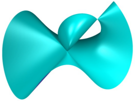
Höhere Potenzen $\Rightarrow$ wesentlich kompliziertere Gebilde.
Insbesondere können dabei auch Spitzen auftreten.
Einige Beispiele:



$x^2 + y^2 = z^2$



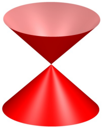
$x^3 + y^2 = z^2$



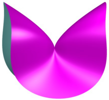
$x^3 + y^2 z + xz^2 = xz$

Flächen mit Spitzen

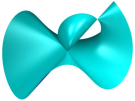
Höhere Potenzen $\Rightarrow$ wesentlich kompliziertere Gebilde.
Insbesondere können dabei auch Spitzen auftreten.
Einige Beispiele:



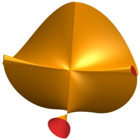
$x^2 + y^2 = z^2$



$x^3 + y^2 = z^2$



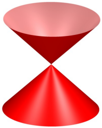
$x^3 + y^2 z + xz^2 = xz$



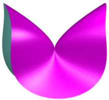
$x^2 yz + x^2 z^2 = y^3 z + y^3$

Flächen mit Spitzen

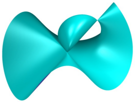
Höhere Potenzen $\Rightarrow$ wesentlich kompliziertere Gebilde.
Insbesondere können dabei auch Spitzen auftreten.
Einige Beispiele:



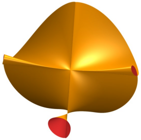
$x^2 + y^2 = z^2$



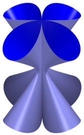
$x^3 + y^2 = z^2$



$x^3 + y^2 z + xz^2 = xz$



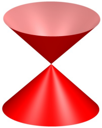
$x^2 yz + x^2 z^2 = y^3 z + y^3$



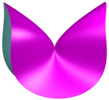
$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2 (z^2 + 1)$

Flächen mit Spitzen

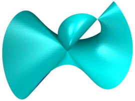
Höhere Potenzen $\Rightarrow$ wesentlich kompliziertere Gebilde.
Insbesondere können dabei auch Spitzen auftreten.
Einige Beispiele:



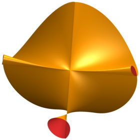
$x^2 + y^2 = z^2$



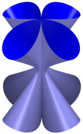
$x^3 + y^2 = z^2$



$x^3 + y^2 z + xz^2 = xz$



$x^2 yz + x^2 z^2 = y^3 z + y^3$

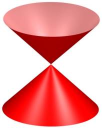


$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2 (z^2 + 1)$

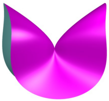
Halten wir die höchste Potenz d der Gleichung fest, stellt sich die **Frage:** Was ist die größtmögliche Anzahl von Spitzen?

Flächen mit Spitzen

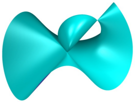
Höhere Potenzen $\Rightarrow$ wesentlich kompliziertere Gebilde.
Insbesondere können dabei auch Spitzen auftreten.
Einige Beispiele:



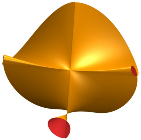
$x^2 + y^2 = z^2$



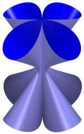
$x^3 + y^2 = z^2$



$x^3 + y^2 z + xz^2 = xz$



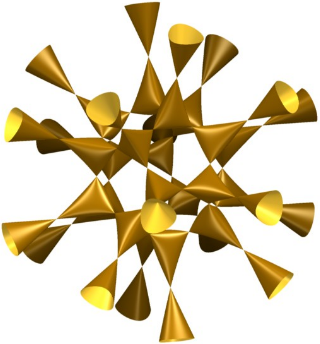
$x^2 yz + x^2 z^2 = y^3 z + y^3$



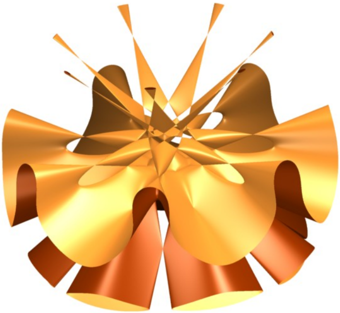
$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2 (z^2 + 1)$

Halten wir die höchste Potenz d der Gleichung fest, stellt sich die **Frage:** Was ist die größtmögliche Anzahl von Spitzen?
Antwort: $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6$: bekannt. $d \geq 7$: bisher unbekannt.

Viele Spitzen — Schönheit durch Symmetrie



$d = 6$. 65 Spitzen. Gefunden von W. Barth (1996). Symmetrie des Ikosaeders. Gleichung involviert den Goldenen Schnitt.



$d = 7$. 99 Spitzen. Gefunden von O. Labs (2005). Symmetrie des regelmäßigen 7-Ecks. Vielleicht sind 104 möglich — unbekannt!!!

Zusammenfassung

Wir haben erfahren:

- Mathematik, Musik, Kunst und Biologie sind eng verbunden.
- Schön kann nicht nur ein Bild, sondern auch ein Beweis oder eine Formel sein.
- Geometrie ist wesentlich mehr als nur Gerade, Kreis, Kugel und Ebene.
- Es existieren viele Zusammenhänge zwischen zunächst sehr unterschiedlich erscheinenden Gebieten der Mathematik.
- Es gibt noch viele, viele offene Fragen in der Geometrie bzw. in der Mathematik.

Zusammenfassung

Wir haben erfahren:

- Mathematik, Musik, Kunst und Biologie sind eng verbunden.
- Schön kann nicht nur ein Bild, sondern auch ein Beweis oder eine Formel sein.
- Geometrie ist wesentlich mehr als nur Gerade, Kreis, Kugel und Ebene.
- Es existieren viele Zusammenhänge zwischen zunächst sehr unterschiedlich erscheinenden Gebieten der Mathematik.
- Es gibt noch viele, viele offene Fragen in der Geometrie bzw. in der Mathematik.

Zusammenfassung

Wir haben erfahren:

- Mathematik, Musik, Kunst und Biologie sind eng verbunden.
- Schön kann nicht nur ein Bild, sondern auch ein Beweis oder eine Formel sein.
- Geometrie ist wesentlich mehr als nur Gerade, Kreis, Kugel und Ebene.
- Es existieren viele Zusammenhänge zwischen zunächst sehr unterschiedlich erscheinenden Gebieten der Mathematik.
- Es gibt noch viele, viele offene Fragen in der Geometrie bzw. in der Mathematik.

Zusammenfassung

Wir haben erfahren:

- Mathematik, Musik, Kunst und Biologie sind eng verbunden.
- Schön kann nicht nur ein Bild, sondern auch ein Beweis oder eine Formel sein.
- Geometrie ist wesentlich mehr als nur Gerade, Kreis, Kugel und Ebene.
- Es existieren viele Zusammenhänge zwischen zunächst sehr unterschiedlich erscheinenden Gebieten der Mathematik.
- Es gibt noch viele, viele offene Fragen in der Geometrie bzw. in der Mathematik.

Zusammenfassung

Wir haben erfahren:

- Mathematik, Musik, Kunst und Biologie sind eng verbunden.
- Schön kann nicht nur ein Bild, sondern auch ein Beweis oder eine Formel sein.
- Geometrie ist wesentlich mehr als nur Gerade, Kreis, Kugel und Ebene.
- Es existieren viele Zusammenhänge zwischen zunächst sehr unterschiedlich erscheinenden Gebieten der Mathematik.
- Es gibt noch viele, viele offene Fragen in der Geometrie bzw. in der Mathematik.

Vielen Dank...

für Ihre Aufmerksamkeit!

Oliver Labs

Kommen Sie zu unserer Ausstellung IMAGINARY 2008: 24. Oktober – 16. November in der K4-Galerie!!!

Vortrag zum Nachlesen auf:
`www.OliverLabs.net`

Weitere Bilder, Informationen und unsere Visualisierungs–Software *surfer* auf:
`www.Imaginary2008.de`

Weitere Bilder und Filme algebraischer Flächen auf:
`www.AlgebraicSurface.net`